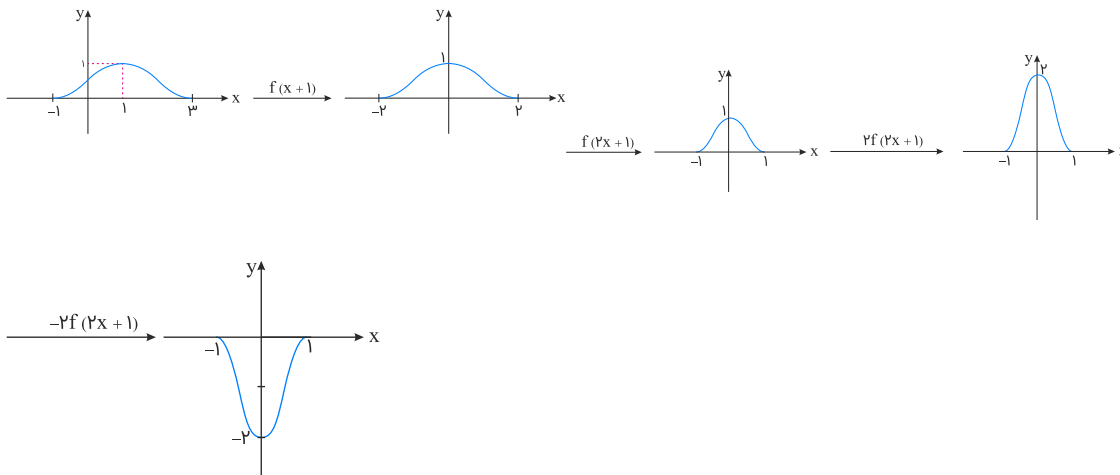




گزینه ۴

۱

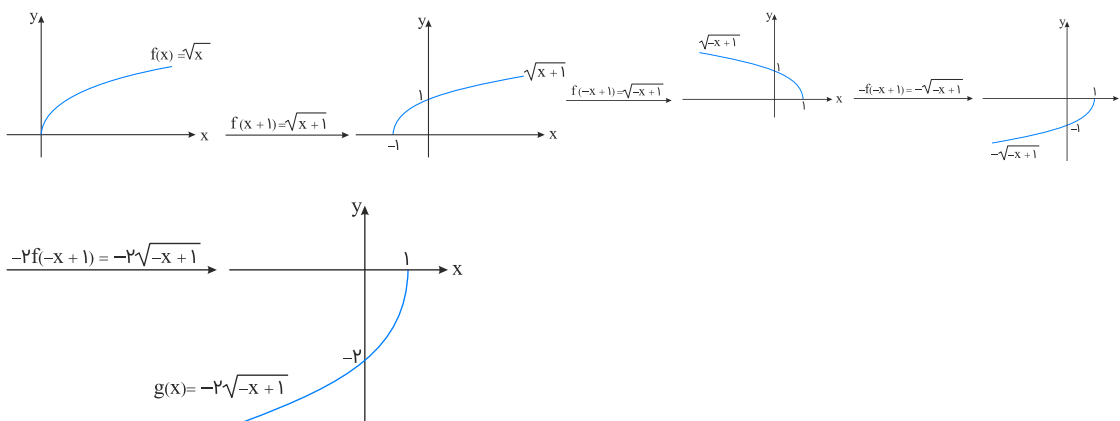
در گام نخست تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال افقی می‌دهیم؛ سپس طول نقاط نمودار را در $\frac{1}{p}$ ضرب می‌کنیم و بعد عرض نقاط را در ۲ ضرب کرده و در نهایت نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. داریم:



گزینه ۲

۲

باید بررسی کنیم چه تبدیلاتی روی نمودار تابع $f(x)$ آمده تا به نمودار تابع $g(x)$ تبدیل شده است. اینکه نمودار هم نسبت به محور x ها و هم نسبت به محور y ها قرینه شده است، کمی کار را سخت می‌کند. نمودار f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم (یعنی به جای x ، $x+1$ قرار می‌دهیم، یعنی $f(x+1)$) و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (یعنی به جای x ، $-x$ قرار می‌دهیم، یعنی $f(-x+1)$). حال نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده (کل تابع را در -1 ضرب می‌کنیم، یعنی $-f(-x+1)$) و بعد عرض همه نقاط را ۲ برابر می‌کنیم ($-2f(-x+1)$).



پس ضابطه تابع g عبارت است از:

$$g(x) = -2\sqrt{-x+1} \Rightarrow g(-$$

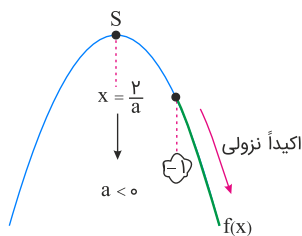
چون $x \neq [x]$ است، نتیجه می‌گیریم که x عددی صحیح نمی‌باشد (یعنی $x \notin \mathbb{Z}$). حال برای تعیین برد تابع f ، ابتدا از عدد ۳ فاکتورگیری کرده و به راحتی شکل $u - [u]$ را در ضابطه f می‌سازیم. عبارت $u - [u]$ همواره در بازه $[0, 1)$ تغییر می‌کند (تابع جزء اعشاری). زمانی $u - [u]$ برابر صفر می‌شود که $u = x^2$ عددی صحیح شود. دقت کنید می‌توانیم عدد غیر صحیح را به توان ۲ برسانیم و $u = x^2$ مقدار صحیحی به خود بگیرد (به عنوان مثال $x = \sqrt{2}$ ، عبارت $u = x^2$ را صحیح می‌کند). پس عبارت $x^2 - [x^2]$ کل بازه $[0, 1)$ را می‌تواند به خود اختصاص دهد، پس داریم:

$$f(x) = 3x^2 - 3[x^2] = 3(x^2 - [x^2])$$

$$0 \leq x^2 - [x^2] < 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq f(x) < 3 \Rightarrow R_f = [0, 3)$$

پس برد تابع f شامل سه عدد صحیح ۰، ۱، ۲ است.

از صورت تست نتیجه می‌گیریم که تابع f در بازه $[-1, +\infty)$ اکیداً نزولی است. برای این منظور قبل از هر کاری باید به این موضوع توجه کنیم که قطعاً دهانه سهمی رو به پایین است. در غیر این صورت تابع درجه دوم، نمی‌تواند از عدد -1 به بعد، اکیداً نزولی باشد. از طرفی دیگر می‌دانیم تابع درجه دوم زمانی در یک بازه اکیداً یکتا است که طول رأس سهمی در درون آن بازه نباشد، پس داریم:



(۱) $a < 0 \Rightarrow$ دهانه سهمی رو به پایین است

$$\text{طول رأس سهمی} = \frac{p}{a} \leq -1 \xrightarrow{\text{عکس می‌کنیم}} \frac{a}{p} \geq -1 \xrightarrow{\times p} a \geq -p \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱) \cap (۲)} -p \leq a < 0$$

روش اول:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f(f(x)) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} = \frac{2x}{2} = x$$

روش دوم: در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد، داریم:

$$a+d=0 \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

از طرفی ترکیب هر تابع با وارونش، برابر تابع همانی است، پس داریم:

$$f^{-1}(f(x)) = x \xrightarrow{f^{-1}(x)=f(x)} f(f(x)) = x \text{ یا } f(f^{-1}(x)) = x$$

حال چون در تابع $f(x) = \frac{-x+1}{x+1}$ مقدار $a+d=0$ است، پس بدون هیچ گونه محاسبه‌ای، برای تعیین ضابطه تابع $f \circ f(x)$ می‌توانیم ضابطه $f(f^{-1}(x))$ یا $f^{-1}(f(x))$ را مشخص نماییم که برابر تابع همانی x است.

روش سوم:

مقدار ضابطه $f \circ f(x)$ را به ازای x_0 دلخواهی به دست آورده و سپس این مقدار دلخواه را در تک‌تک گزینه‌ها، جایگذاری کرده و گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به ازای همان x_0 ، همان مقدار را بدهد. داریم:

$$f(f(x)) \xrightarrow{x=1} f(f(1)) = f(0) = 1$$

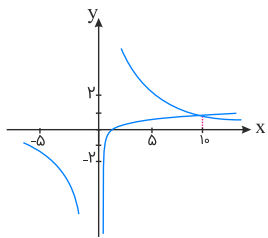
تنها گزینه (۱) به ازای $x=1$ برابر با ۱ می‌شود.

$$g \circ f(x) = \sqrt{10 - x \log x}$$

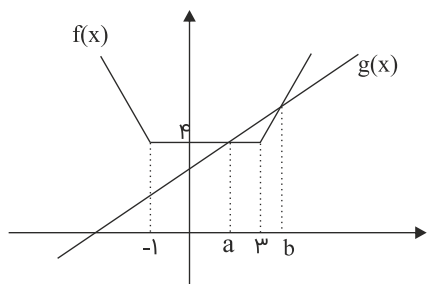
$$1) x > 0$$

$$2) 10 - x \log x \geq 0 \Rightarrow x \log x \leq 10 \Rightarrow \log x \leq \frac{10}{x}$$

نمودار $y = \log x$ و $y = \frac{10}{x}$ را رسم می‌کنیم. مطابق شکل در فاصله $(0, 10]$ ، $\log x \leq \frac{10}{x}$ است.



با رسم نمودار هر دو شکل در یک دستگاه مختصات داریم:



باتوجه به شکل در بازه (a, b) نمودار g بالاتر از f قرار دارد، بنابراین کافی است طول نقاط تلاقی را بیابیم (دقت کنید باتوجه به شکل احتمالی $-1 < a < 3$ و $b > 3$ می باشد، بنابراین همین فرض را امتحان می کنیم):

$$|a+1| + |a-3| = \frac{a+7}{2} \xrightarrow{-1 < a < 3} (a+1) - (a-3) = \frac{a+7}{2}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{a+7}{2} \Rightarrow a = 1 \quad \checkmark$$

$$|b+1| + |b-3| = \frac{b+7}{2} \xrightarrow{b > 3} b+1 + b-3 = \frac{b+7}{2}$$

$$\Rightarrow 4b - 4 = b + 7 \Rightarrow b = \frac{11}{3} \quad \checkmark$$

بنابراین هر دو فرض سازگار بوده حاصل $b - a = \frac{11}{3} - 1 = \frac{8}{3}$ است.

می دانیم $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$ و $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $D_{f^{-1} \circ f} = D_f = R_{f^{-1}}$ است، پس ضابطه توابع f و f^{-1} باهم برابرند. برای اینکه این دو تابع برابر باشند، باید دامنه و برد یکسانی داشته باشند پس باید گزینه ای را انتخاب کنیم که در آن $D_f = R_f$ است.

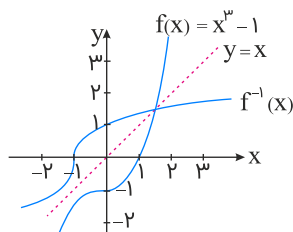
گزینه ۱: $D_f = (0, +\infty)$ $R_f = \mathbb{R}$

گزینه ۲: $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ $R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

گزینه ۳: $D_f = \mathbb{R}$ $R_f = [0, +\infty)$

گزینه ۴: $D_f = R_f = [1, +\infty)$

نمودار $f(x) = x^3 - 1$ را رسم می‌کنیم. برای رسم $f^{-1}(x)$ نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم.

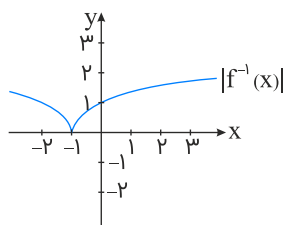


البته می‌توانیم ضابطه $f^{-1}(x)$ را نیز پیدا کنیم.

$$y = x^3 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y + 1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$$

حالا $|f^{-1}(x)|$ را رسم می‌کنیم.



تابع در فاصله $[-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

اول $g \circ f$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(f(-2)) = g(-1) \quad \times$$

$$g(f(0)) = g(1) = 1$$

$$g(f(1)) = g(-2) \quad \times$$

$$g(f(2)) = g(7) = 7 \times 2 = 14$$

$$\Rightarrow g \circ f = \{(0, 1), (2, 14)\}$$

مقدار $g^2 + 1$ را به ازای $x = 2$ و $x = 0$ باید پیدا کنیم.

$$g(x) = x\sqrt{x}$$

$$(g^2 + 1)(0) = g^2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$(g^2 + 1)(2) = g^2(2) + 1 = 14 + 1 = 15$$

$$\frac{g \circ f}{g^2 + 1} = \{(0, \frac{1}{1}), (2, \frac{15}{1})\} = \{(0, 1), (2, 15)\}$$

$$y = x + \sqrt{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y + \frac{1}{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x = \left(\sqrt{y + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\right)^2$$

به علاوه برد تابع $y = x + \sqrt{x}$ برابر $[0, +\infty)$ است چرا که دامنه آن $x \geq 0$ می‌باشد که در این صورت داریم:

$$x \geq 0, \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

برای رسم نمودار $f([x])$ ، دامنه تابع $f(x)$ را به صورت زیر بازه‌بندی می‌کنیم:

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow f([x]) = f(-2) = -1$$

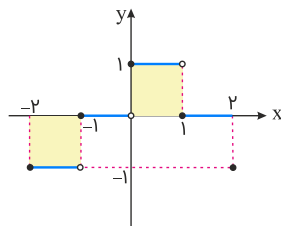
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f([x]) = f(-1) = 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f([x]) = f(0) = 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f([x]) = f(1) = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f([x]) = f(2) = -1$$

پس نمودار این تابع به این صورت خواهد بود:



واضح است که ناحیه ایجادشده با محور x ها شامل دو مربع به ضلع واحد است و لذا: $S = 1 + 1 = 2$

باتوجه به مفروضات مشخص می‌شود که g نیز یک تابع خطی است.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow a = \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow f(x) = \sqrt{3}x + b$$

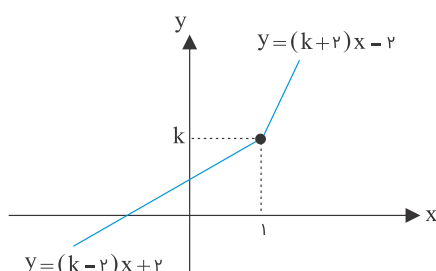
$$g(x) = cx + d$$

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3}(cx + d) + b = \sqrt{3}cx + \sqrt{3}d + b = -\lambda x + 1\lambda \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = c(\sqrt{3}x + b) + d = \sqrt{3}cx + bc + d = -\lambda x - 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}c = -\lambda \Rightarrow c = -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}d + b = 1\lambda \\ bc + d = -9 \end{cases} \xrightarrow{c=-\sqrt{3}} d = 3, b = 6 \Rightarrow g(x) = cx + d = -\sqrt{3}x + 3 \Rightarrow g(-2) = 7$$

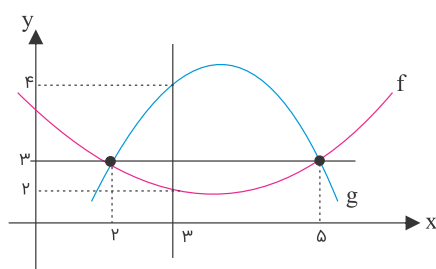
برای حذف قدر مطلق و ساده‌سازی عبارت، دامنه تابع را به دو بازه $x \geq 1$ و $x < 1$ افراز می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 + kx = (k+2)x - 2 & ; x \geq 1 \\ -2x + 2 + kx = (k-2)x + 2 & ; x < 1 \end{cases}$$



هر دو ضابطه، خط هستند و مقدار هر دو ضابطه به ازای $x = 1$ یکسان است. (توجه داشته باشید که نمودار ضابطه اول به ازای $x = 1$ ، توپر است و نمودار ضابطه دوم به ازای $x = 1$ توخالی می‌باشد). برای آنکه این دو خط اکیداً صعودی باشند، باید شیب هر دوی آن‌ها مثبت باشد، یعنی: $k+2 > 0$ و $k-2 > 0$ و در نتیجه $k > -2$ و $k > 2$ که از اشتراک این دو بازه $k > 2$ به دست می‌آید.

شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



تفاضل دو سهمی باز هم یک سهمی خواهد بود:

فرض کنید $h(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$:

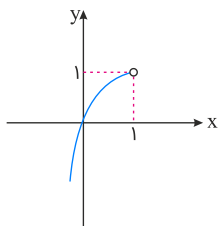
$$\begin{cases} h(2) = f(2) - g(2) = 3 - 3 = 0 \\ h(5) = f(5) - g(5) = 3 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) = a(x-2)(x-5) \quad (1)$$

از طرفی:

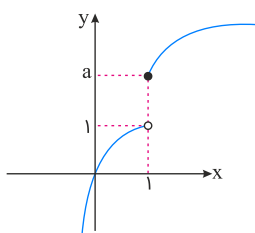
$$h(3) = f(3) - g(3) = 2 - 4 = -2 \xrightarrow{(1)} a(1)(-2) = -2 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow h(x) = (x-2)(x-5) \Rightarrow h(-1) = 18 \Rightarrow (f-g)(-1) = 18$$

باتوجه به اینکه $2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1$ ، نمودار این ضابطه را در $x < 1$ رسم می‌کنیم.



برای آنکه تابع f اکیداً صعودی باشد، کافی است عرض نقطهٔ توپُر، از عرض نقطهٔ توخالی بزرگ‌تر یا مساوی باشد (در سایر نقاط هر دو ضابطه روند صعودی خود را طی می‌کند و نیازی به بررسی نیست) یعنی: $a \geq 1$. بنابراین یکی از حالت‌های نمودار می‌تواند به صورت زیر باشد:



برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون در تست کافی است x ای دلخواه در دامنهٔ تابع انتخاب کنیم (بهتر است نقطه‌های ابتدا و انتهای دامنه را انتخاب نکنیم، چون ممکن است دو گزینه یا بیشتر درست شوند) سپس با قرار دادن آن در تابع داده‌شده، y متناظر با آن را حساب کرده و سپس جای x و y نقطهٔ به‌دست‌آمده را عوض کرده و در گزینه‌ها جایگذاری کنیم تا گزینهٔ درست مشخص شود.

$$y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \xrightarrow{x=5} f(3) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5-1}} = \sqrt{5 - 2(2)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow A \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix} \in f \Leftrightarrow A' \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix} \in f^{-1} \Rightarrow \text{گزینه ۴}$$

تابع g یک تابع خطی است. باتوجه به نمودار تابع g ، ضابطه آن را به دست می‌آوریم:

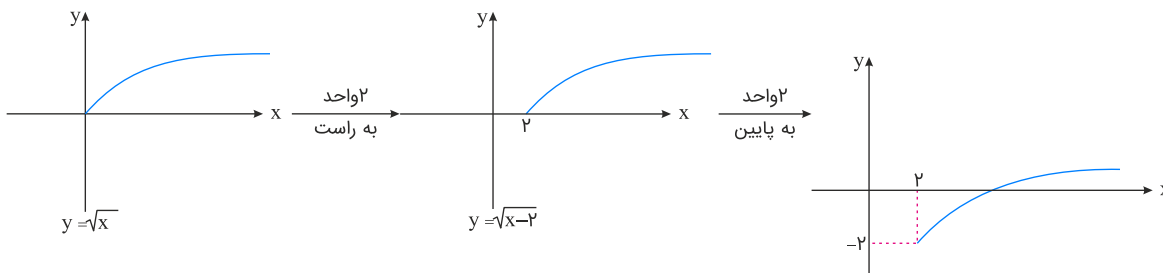
$$m = \frac{3 - 0}{0 - 3} = -1$$

$$y - 0 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 3 \Rightarrow g(x) = -x + 3$$

با جایگذاری ضابطه g در f ؛ ضابطه f را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \sqrt{1 - g(x)} - 2 \xrightarrow{g(x) = -x + 3} f(x) = \sqrt{1 - (-x + 3)} - 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$$

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$ ، کافی است نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را ابتدا ۲ واحد به راست ببریم و $y = \sqrt{x - 2}$ و سپس آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم تا به ضابطه $f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$ برسیم.



راه اول:

می‌دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ پس $x \in \mathbb{Z}$ در دامنه تعریف نمی‌باشد یعنی گزینه (۱) و (۲) نادرست‌اند و ازطرفی باید $0 \leq 1 - 2[x] < 1$ ، لذا $[x] \geq \frac{1}{2}$ پس $x \geq 1$ اما برای x های غیر صحیح یعنی:

$$D_f = [1, +\infty) - \mathbb{Z} = (1, +\infty) - \mathbb{N}$$

راه دوم:

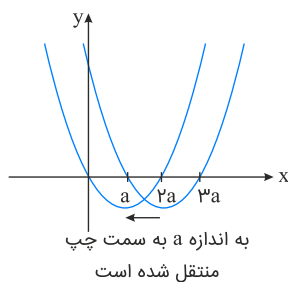
باتوجه به اینکه به ازای هر عدد صحیح، $[x] + [-x] = 0$ می‌شود، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) که شامل اعداد صحیح هستند، نادرست‌اند. ازطرفی از بین اختلاف گزینه‌های (۳) و (۴) اگر عدد $x = 2/5$ را انتخاب کنید، داریم:

$$\sqrt{\frac{1 - 2[2/5]}{[2/5] + [-2/5]}} = \sqrt{\frac{1 - 2 \times 0}{0 - 1}} = \sqrt{\frac{-2}{-1}} = \sqrt{2}$$

یعنی زیر رادیکال مثبت شد. به عبارتی $x = 2/5$ قابل قبول است، پس گزینه (۳) که عدد $2/5$ را ندارد، حذف می‌شود و گزینه (۴) درست است.

$$f(x) = x^2 - 2ax + 3a^2 = x^2 - (a + 2a)x + a \times 3a = (x - a)(x - 3a)$$

نمودار سهمی را رسم می‌کنیم که دهانه آن رو به بالاست و صف‌های (ریشه‌های) آن $x = a$ و $x = 3a$ است. برای آنکه نمودار از ربع سوم عبور نکند، منحنی تا حدی می‌تواند به چپ منتقل شود که نقطه $x = a$ روی تابع $f(x)$ به مبدأ منتقل شود، یعنی:



تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{a-3x} + 5$ در صورتی ثابت است که دامنه آن محدود به یک نقطه باشد:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$a - 3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{a}{3}$$

اگر $\frac{a}{3} = 1$ یعنی $a = 3$ باشد، دامنه f فقط شامل $x = 1$ خواهد بود و $f = \{(1, 5)\}$ می‌شود.
پس تابع $f + g$ فقط به ازای $x = 1$ تعریف شده است:

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 5 + (1) = 6$$

توجه کنید چون g تابع همانی است، داریم: $g(x) = x$.

طبق رابطه داده شده داریم:

$$F_2 - F_1 = 11 \Rightarrow \left(\frac{9}{5}C_2 + 32\right) - \left(\frac{9}{5}C_1 + 32\right) = 11$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5}(C_2 - C_1) = 11 \Rightarrow C_2 - C_1 = 45$$

می‌دانیم اگر $m > 0$ باشد، $\frac{|m|}{m} = 1$ و اگر $m < 0$ باشد، $\frac{|m|}{m} = -1$ است. (واضح است که $m \neq 0$)

$$۱) m > 0 \Rightarrow f = \{(1, m^2 - 2), (1, -2), (-1, 7)\}$$

$$m^2 - 2 = -2 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \quad \times$$

$$۲) m < 0 \Rightarrow f = \{(-1, m^2 - 2), (1, -2), (-1, 7)\}$$

$$m^2 - 2 = 7 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases} \quad \times$$

فقط به ازای $m = -3$ رابطه داده شده تابع است.

در سهمی اگر ضریب x^2 مثبت باشد، برد سهمی، بازه $[\frac{-\Delta}{2a}, +\infty)$ است.

اگر یک عدد از دامنه حذف شود، برد تغییری نمی‌کند، مگر آن عدد طول رأس سهمی باشد. پس $x = 1$ طول رأس سهمی است:

$$\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow \frac{-b}{2} = 1 \Rightarrow b = -2$$

از طرفی عدد c ، همان y رأس سهمی است:

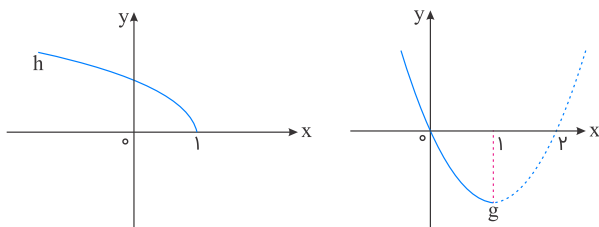
$$f(x) = x^2 - 2x + 2c \xrightarrow{f(1)=c} 1 - 2 + 2c = c \Rightarrow c = 1$$

در نتیجه: $b + c = -2 + 1 = -1$.

تابع f را به صورت جمع دو تابع $g(x) = x^2 - 2x$ و $h(x) = \sqrt{1-x}$ در نظر می‌گیریم. دقت کنیم دامنه تابع f به صورت $D_f = (-\infty, 1]$ است. داریم:

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 2x}_{g(x)} + \underbrace{\sqrt{1-x}}_{h(x)}$$

نمودار g و h را با شرط $x \leq 1$ رسم می‌کنیم. باتوجه به نمودارهای زیر، هر دو تابع، اکیداً نزولی هستند. چون جمع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است، پس f نیز قطعاً اکیداً نزولی خواهد بود.



ضابطه تابع $f(x)$ (باتوجه به نمودار) برابر است با:

$$f(x) = (x - k)^3 + 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3 + 1$$

تابع از مبدأ گذشته است، بنابراین نقطه $(0, 0)$ در آن صدق می‌کند:

$$0 = (0)^3 - 3k(0)^2 + 3k^2(0) - k^3 + 1 \Rightarrow k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$$

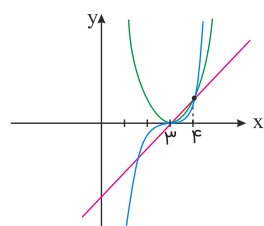
ضابطه تابع پس از جایگذاری عدد ۱ به جای k برابر است با:

$$f(x) = x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3 + 1 \xrightarrow{k=1} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

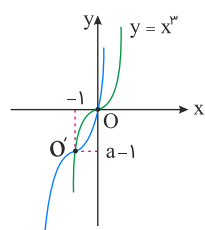
پس $a = -3$ ، $b = 3$ و $c = 0$ ، بنابراین داریم:

$$a + b + c = -3 + 3 + 0 = 0$$

توابع $f(x) = (x + a)^3$ ، $g(x) = (x + a)^2$ و $h(x) = (x + a)$ هرکدام، یک انتقال افقی a واحدی از توابع $y = x^3$ ، $y = x^2$ و $y = x$ هستند که تنها در بازه $[0, 1]$ مقدار تابع $y = x$ از مقدار تابع $y = x^2$ و مقدار تابع $y = x^2$ از مقدار تابع $y = x^3$ بیش‌تر است. پس از انتقال افقی a واحدی این سه تابع، تغییری در شکل و ظاهر و نحوه قرارگیری آن‌ها رخ نمی‌دهد. باتوجه به این که در بازه $[3, 4]$ داریم: $(x + a)^3 \geq (x + a)^2 \geq (x + a)$ ، می‌توان دریافت که هرکدام از توابع f ، g و h یک انتقال سه واحدی به سمت راست از توابع اولیه‌شان هستند، بنابراین: $a = -3$.



ابتدا ضابطه تابع را طوری می‌نویسیم که از آن بیشترین استفاده را ببریم. باتوجه به اینکه: $x^3 + 3x^2 + 3x + a = (x + 1)^3 + a - 1$ نمودار این تابع را از روی تابع $y = x^3$ رسم می‌کنیم:

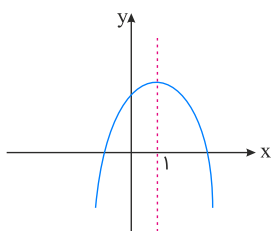


مرکز تقارن تابع $y = x^3$ نقطه $O(0, 0)$ است که پس از انتقال، به نقطه $(-1, -5)$ تبدیل شده است. طبق قوانین انتقال، نقطه $O(0, 0)$ ابتدا یک واحد انتقال افقی به سمت چپ داشته و سپس $(a - 1)$ واحد انتقال قائم خواهد داشت. بنابراین مختصات این نقطه پس از انتقال $(-1, a - 1)$ خواهد بود که باتوجه به فرض مسئله داریم:

$$O' = (-1, -5) \Rightarrow (-1, -5) = (-1, a - 1) \Rightarrow a - 1 = -5 \Rightarrow a = -4$$

نکته: مرکز تقارن تابع درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، نقطه $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ است.

ضابطه تابع، ضابطه یک سهمی را نشان می‌دهد که باتوجه به بازه‌های اکیداً صعودی و اکیداً نزولی تابع، می‌توان دریافت که $x = 1$ محور تقارن تابع است و اینکه سهمی رو به پایین است، بنابراین ضریب x^2 منفی و $-\frac{b}{2a} = 1$ است.



$$m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$$

$$-\frac{2(m^2 - 3)}{2(m - 3)} = 1 \Rightarrow -(m^2 - 3) = m - 3$$

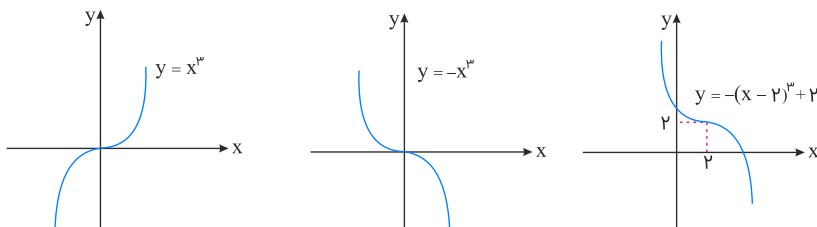
$$\Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \xrightarrow{m < 3} \text{ قابل قبول} \\ m = -3 \xrightarrow{m < 3} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر m برابر است با -1 با $2 + (-3) = -1$.

ضابطه تابع را به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 6x^2 - 12x + 10 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 + 2 \\ &= -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 2 = -(x - 2)^3 + 2 \end{aligned}$$

نمودار تابع $y = x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، سپس نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



نمودار تابع از ربع سوم نمی‌گذرد.